**Волновое уравнение для упругих волн**

Попробуем восстановить волновое уравнение по его решению:

$$\xi = a\cos(\omega t - (\vec{k};\vec{r}) + \varphi) \tag{1}$$

Для этого распишем вторые производные $\xi$ по координатам и времени:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\omega^2 a\cos(\omega t - (\vec{k};\vec{r}) + \varphi) \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -k_x^2 a\cos(\omega t - (\vec{k};\vec{r}) + \varphi) \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = -k_y^2 a\cos(\omega t - (\vec{k};\vec{r}) + \varphi) \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -k_z^2 a\cos(\omega t - (\vec{k};\vec{r}) + \varphi) \tag{5}$$

Можно выразить эти производные через исходную функцию $\xi$:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\omega^2\xi \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -k_x^2\xi \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = -k_y^2\xi \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -k_z^2\xi \tag{9}$$

Сложим производные по координатам:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\xi = -k^2\xi \tag{10}$$

Выразим $\xi$ через ее производную по времени:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial\xi}{\partial t^2} \tag{11}$$

Поскольку $\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{v^2\omega^2} = \frac{1}{v^2}$, получаем:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial\xi}{\partial t^2} \tag{12}$$

Это волновое уравнение для упругих волн. Его левую часть записывают с помощью оператора Лапласа:

$$\Delta\xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \tag{13}$$